

## ДИСПЕРСИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ИЗОГНУТЫХ ДИАФРАГМИРОВАННЫХ ВОЛНОВОДОВ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

Б. Н. МОРОЗОВ, Е. В. ПАДУСОВА

(Представлено научным семинаром радиотехнического факультета)

### Введение

В последнее время в Томском политехническом институте по инициативе профессора доктора А. А. Воробьева ведутся экспериментальные и теоретические исследования свойств изогнутых и замкнутых волноводов, которые могут найти применение в циклических ускорителях электронов с управляющим магнитным полем [1]. В камере такого ускорителя электромагнитная волна, имеющая продольную составляющую электрического поля, должна распространяться в азимутальном направлении с фазовой скоростью, равной скорости света.

Одним из способов замедления волн является диафрагмирование волновода периодической структурой. Ниже рассмотрены два варианта диафрагмирования изогнутого волновода прямоугольного сечения. Выбор варианта может диктоваться конструктивными особенностями волноводного циклического ускорителя, а также величиной затухания и сопротивления связи.

### Вывод дисперсионного уравнения для волновода, диафрагмированного по изогнутым стенкам

На рис. 1 изображена волноводная система, являющаяся предметом исследований, и указаны принятые обозначения. Волновод считается идеально проводящим, а пространство взаимодействия (размером  $2a$  в радиальном направлении) и пространство резонаторов (область между металлическими ребрами) заполнены идеальным диэлектриком.

В цилиндрической системе координат  $r, \varphi, z$  целесообразно классифицировать электромагнитные волны вдоль прямолинейной координаты  $z$  [2], т. е. рассматривать „электрические“ волны ( $H_z = 0$ ), либо „магнитные“ ( $E_z = 0$ ), либо, наконец, гибридные — совокупность тех и других. В настоящем разделе рассматриваются волны „магнитного“ типа, для которых компоненты электромагнитного поля выражаются через магнитный вектор Герца соотношениями:

$$E_r = -j \frac{\kappa}{r} \frac{\partial \Pi_H}{\partial \varphi}, \quad E_\varphi = j \kappa \frac{\partial \Pi_H}{\partial r}, \quad E_z = 0,$$

$$H_r = \frac{\partial^2 \Pi_H}{\partial r \partial z}, \quad H_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Pi_H}{\partial \varphi \partial z}, \quad H_z = \frac{\partial^2 \Pi_H}{\partial z^2} + \kappa^2 \Pi_H, \quad (1)$$

причем функция  $\Pi_H$  является частным решением скалярного волнового уравнения

$$\Delta \Pi_H + \kappa^2 \Pi_H = 0. \quad (2)$$

При граничных условиях

$$\Pi_H = 0 \text{ при } z=0 \text{ и } z=b, \quad (3)$$

где  $b$ —высота волновода,  $\kappa = \frac{2}{\lambda}$ .

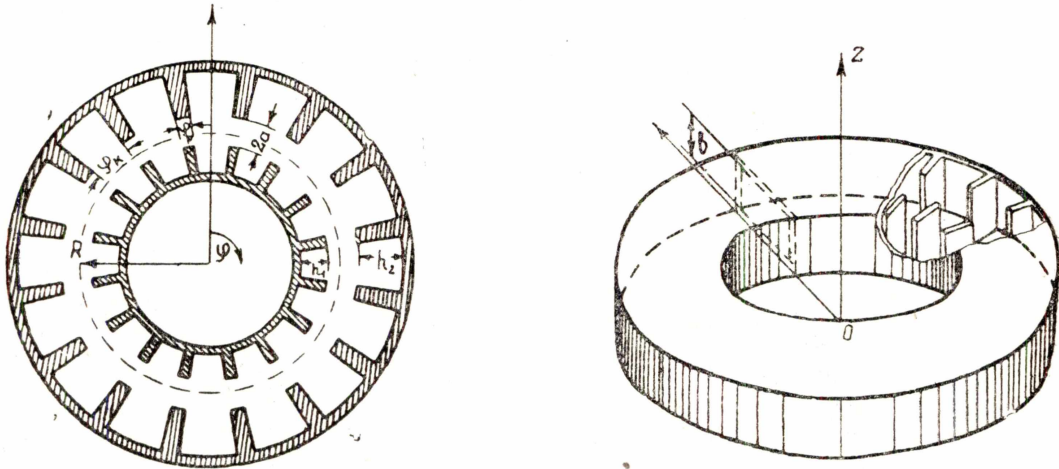


Рис. 1. Изогнутый волновод, диафрагмированный по боковым стенкам.

В пространстве взаимодействия будем рассматривать волны, распространяющиеся в положительном азимутальном направлении. Ввиду периодичности структуры по  $\varphi$  волновой характер процесса в азимутальном направлении представим множителем  $e^{-jn_s\varphi}$ , где  $n_s = n_0 + \frac{2\pi s}{\Psi}$  и  $s=0, \pm 1, \pm 2$ —число, характеризующее прямые и обратные пространственные гармоники. Рассмотрим лишь случай, когда в направлении  $z$  укладывается одна полуволна, что не повлияет на общность окончательного результата. Тогда выражения для компонент поля запишутся в виде:

$$E_\varphi = j \kappa \sin \kappa_z z \sum_{s=-\infty}^{\infty} \kappa [A_s I_{n_s}(\kappa r) + B_s N_{n_s}(\kappa r)] e^{-jn_s\varphi},$$

$$H_\varphi = -j \cos \kappa_z z \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{n_s}{r} K_z [A_s I_{n_s}(\kappa r) + B_s N_{n_s}(\kappa r)] e^{-jn_s\varphi}, \quad (4)$$

$$H_z = \kappa^2 \sin \kappa_z z \sum_{s=-\infty}^{\infty} [A_s I_{n_s}(\kappa r) + B_s N_{n_s}(\kappa r)] e^{-jn_s\varphi}.$$

Здесь, как и в дальнейшем, множитель  $e^{j\omega t}$  опущен;  $I_n(xr)$ ,  $N_n(xr)$ ,  $\dot{I}_n(xr)$ ,  $\dot{N}_n(xr)$  — функции Бесселя и Неймана и их производные по аргументу;  $n_s$  — угловая постоянная распространения;

$$x^2 = \kappa^2 - \kappa_z^2; \kappa_z = \frac{\pi}{b}.$$

Пространство резонаторов удобно рассматривать как клиновидную линию передачи, короткозамкнутую на конце. Применяя граничные условия  $E_\varphi = 0$  при  $r = R_1$  и  $r = R_2$  и учитывая, что в азимутальном направлении будут образовываться стоячие волны, получим для области II ( $r < r_1$ )

$$\begin{aligned} E_\varphi &= j\kappa \sum_{l=0}^{\infty} x C_l [\dot{I}_\alpha(xr) + P_{II} \dot{N}_\alpha(xr)] \cos \alpha \varphi \sin \kappa_z z; \\ H_\varphi &= -\frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \alpha \kappa_z C_l [I_\alpha(xr) + P_{II} N_\alpha(xr)] \sin \alpha \varphi \cos \kappa_z z; \\ H_z &= \sum_{l=0}^{\infty} C_l [I_\alpha(xr) + P_{II} N_\alpha(xr)] \cos \alpha \varphi \sin \kappa_z z, \end{aligned} \quad (5)$$

а для области III ( $r > r_2$ ) нужно заменить  $C_l$  и  $P_{II}$  на  $D_l$  и  $P_{III}$ , где

$$P_{II} = -\frac{\dot{I}_\alpha(xR_1)}{\dot{N}_\alpha(R_1)}, \quad P_{III} = -\frac{\dot{I}_\alpha(xR_2)}{\dot{N}_\alpha(xR_2)}, \quad \alpha = \frac{l\pi}{\psi},$$

$l=0, 1, 2, \dots$  — число полуволн в направлении  $\varphi$ .

Проведем сшивание компонент поля (4) и (5) на границе  $r = r_1 = R_1 + h_1$ , а затем на границе  $r = r_2 = R_2 - h_2$ . В результате получим систему 6 уравнений с 4 последовательностями неизвестных  $A_s$ ,  $B_s$ ,  $C_l$  и  $D_l$ .

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad & \sum_{s=-\infty}^{\infty} [A_s \dot{I}_{n_s}(xr_1) + B_s \dot{N}_{n_s}(xr_1)] e^{-jn_s \varphi} = \\ & = \sum_{l=0}^{\infty} C_l [\dot{I}_\alpha(xr_1) + P_{II} \dot{N}_\alpha(xr_1)] \cos \alpha \varphi, \\ \text{II.} \quad & j \sum_{s=-\infty}^{\infty} n_s [A_s I_{n_s}(xr_1) + B_s N_{n_s}(xr_1)] e^{-jn_s \varphi} = \\ & = \sum_{l=1}^{\infty} \alpha C_l [I_\alpha(xr_1) + P_{II} N_\alpha(xr_1)] \sin \alpha \varphi, \\ \text{III.} \quad & \sum_{s=-\infty}^{\infty} [A_s I_{n_s}(xr_1) + B_s N_{n_s}(xr_1)] e^{-jn_s \varphi} = \\ & = \sum_{l=0}^{\infty} C_l [I_\alpha(xr_1) + P_{II} N_\alpha(xr_1)] \cos \alpha \varphi, \end{aligned} \quad (6)$$



$$\begin{aligned} \text{IV.} \quad & \sum_{s=-\infty}^{\infty} [A_s \dot{I}_{n_s}(zr_2) + B_s \dot{N}_{n_s}(zr_2)] e^{-jn_s \varphi} = \\ & = \sum_{l=0}^{\infty} D_l [I_{\alpha}(zr_2) + P_{\text{III}} N_{\alpha}(zr_2)] \cos \alpha \varphi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{V.} \quad & j \sum_{s=-\infty}^{\infty} n_s [A_s I_{n_s}(zr_2) + B_s N_{n_s}(zr_2)] e^{-jn_s \varphi} = \\ & \sum_{l=1}^{\infty} \alpha D_l [I_{\alpha}(zr_2) + P_{\text{III}} N_{\alpha}(zr_2)] \sin \alpha \varphi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{VI.} \quad & \sum_{s=-\infty}^{\infty} [A_s I_{n_s}(zr_2) + B_s N_{n_s}(zr_2)] e^{-jn_s \varphi} = \\ & = \sum_{l=0}^{\infty} C_l [I_{\alpha}(zr_2) + P_{\text{III}}(zr_2)] \cos \alpha \varphi. \end{aligned}$$

Воспользуемся свойством ортогональности функций  $\sin \alpha \varphi$  и  $\cos \alpha \varphi$  в пределах одного периода структуры. Для этого умножим уравнение II и V системы (6) на  $\sin \frac{q\pi}{\psi} \varphi$ , а I, III, IV и VI на  $\cos \frac{q\pi}{\psi} \varphi$  и проинтегрируем I и IV от 0 до  $\Psi$ , а оставшиеся уравнения от 0 до  $\psi$ . Вводя обозначения

$$\begin{aligned} f_l &= I_{\alpha}(zr_1) + P_{\text{II}} N_{\alpha}(zr_1), \\ f'_l &= \dot{I}_{\alpha}(zr_1) + P_{\text{II}} \dot{N}_{\alpha}(zr_1) \\ F_l &= I_{\alpha}(zr_2) + P_{\text{III}} N_{\alpha}(zr_2), \\ F'_l &= \dot{I}_{\alpha}(zr_2) + P_{\text{III}} \dot{N}_{\alpha}(zr_2) \end{aligned} \quad (7)$$

$$Q_{sl} = j \left[ \frac{1 - e^{-j(n_s + \alpha)\psi}}{(n_s + \alpha)} + \frac{1 - e^{-j(n_s - \alpha)\psi}}{(n_s - \alpha)} \right]$$

$$M_{sl} = \frac{1 - e^{-j(n_s + \alpha)\psi}}{(n_s + \alpha)} - \frac{1 - e^{-j(n_s - \alpha)\psi}}{(n_s - \alpha)}$$

$$E_{sl} = j \left[ \frac{1 - e^{-j(n_s + \alpha)\psi}}{(n_s + \alpha)} - \frac{1 - e^{-j(n_s - \alpha)\psi}}{(n_s - \alpha)} \right],$$

получим из (6, II)

$$\text{I.} \quad \sum_{s=-\infty}^{\infty} [A_s \dot{I}_{n_s}(zr_1) + B_s \dot{N}_{n_s}(zr_1)] Q_{sl} = f'_l,$$



$$\begin{aligned}
\text{II.} \quad & j \sum_{s=-\infty}^{\infty} n_s [A_s I_{n_s}(zr_1) + B_s N_{n_s}(zr_1)] S_{sl} = l \pi f_l; \quad l \neq 0, \\
\text{III.} \quad & \sum_{s=-\infty}^{\infty} [A_s I_{n_s}(zr_1) + B_s N_{n_s}(zr_1)] M_{cl} = \psi f_l, \\
\text{IV.} \quad & \sum_{s=-\infty}^{\infty} [A_s \dot{I}_{n_s}(zr_2) + B_s \dot{N}_{n_s}(zr_2)] Q_{sl} = F'_l, \\
\text{V.} \quad & j \sum_{s=-\infty}^{\infty} [A_s I_{n_s}(zr_2) + B_s N_{n_s}(zr_2)] S_{sl} = l \pi F_l; \quad l \neq 0, \\
\text{VI.} \quad & \sum_{s=-\infty}^{\infty} [A_s I_{n_s}(zr_2) + B_s N_{n_s}(zr_2)] M_{cl} = \psi F_l.
\end{aligned} \tag{8}$$

Однако оказывается, что уравнение II системы (8) является следствием уравнения III (это касается и уравнений V и VI), и, поскольку последовательность III является более полной относительно  $l$ , то система (8) тождественна системе

$$\begin{aligned}
& \sum_{s=-\infty}^{\infty} [A_s \dot{I}_{n_s}(zr_1) + B_s \dot{N}_{n_s}(zr_1)] Q_{sl} = C_l f'_l, \\
& \sum_{s=-\infty}^{\infty} [A_s I_{n_s}(zr_1) + B_s N_{n_s}(zr_1)] M_{sl} = \psi C_l f_l, \\
& \sum_{s=-\infty}^{\infty} [A_s \dot{I}_{n_s}(zr_2) + B_s \dot{N}_{n_s}(zr_2)] Q_{sl} = D_l F'_l, \\
& \sum_{s=-\infty}^{\infty} [A_s I_{n_s}(zr_2) + B_s N_{n_s}(zr_2)] M_{sl} = \psi D_l F_l.
\end{aligned} \tag{9}$$

Таким образом, отсутствует кажущаяся неоднозначность решения, поскольку система (9) содержит четыре последовательности неизвестных  $A_s, B_s, C_l, D_l$  и четыре последовательности уравнений. Систему последовательностей (9) легко свести к двум бесконечным системам линейных однородных уравнений относительно амплитудных коэффициентов

$$\sum_{s=-\infty}^{\infty} A_s a_{sl} + B_s b_{sl} = 0, \quad \sum_{s=-\infty}^{\infty} A_s c_{sl} + B_s d_{sl} = 0, \tag{10}$$

где введены обозначения

$$a_{sl} = f_l \dot{I}_{n_s}(zr_1) Q_{sl} - f'_l I_{n_s}(zr_1) M_{sl},$$

$$c_{sl} = F_l \dot{I}_{n_s}(zr_2) Q_{sl} - F'_l I_{n_s}(zr_2) M_{sl},$$

а для  $b_{sl}$  и  $d_{sl}$   $I_n$  и  $\dot{I}_n$  заменить на  $N_n$  и  $\dot{N}_n$ .

Решение системы (10), отличное от нуля, будет в том случае, когда определитель системы будет равен нулю. Следовательно, дисперсионное уравнение рассматриваемого волновода, характеризующее связь между радиусом изгиба, геометрическими параметрами волновода и длиной волны, записывается в виде бесконечного определителя

$$\begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & a_{-10} & b_{-10} & a_{00} & b_{00} & a_{10} & b_{10} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & c_{-10} & d_{-10} & c_{00} & d_{00} & c_{10} & d_{10} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & a_{-11} & b_{-11} & a_{01} & b_{01} & a_{11} & b_{11} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = 0$$

Представляет интерес более подробно остановиться на анализе решения в первом приближении, которому соответствует определитель с нулевыми индексами ( $s=0$ ,  $l=0$ )

$$\begin{vmatrix} a_{00} & b_{00} \\ c_{00} & d_{00} \end{vmatrix} = 0$$

или в развернутом виде

$$\begin{aligned} & \frac{T_1 I_{n_0}[z(R+a)] - \dot{I}_{n_0}[z(R+a)]}{T_1 N_{n_0}[z(R+a)] - \dot{N}_{n_0}[z(R+a)]} = \\ & = \frac{T_2 I_{n_0}[z(R-a)] - \dot{I}_{n_0}[z(R-a)]}{T_2 N_{n_0}[z(R-a)] - \dot{N}_{n_0}[z(R-a)]}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\text{где } T_{1,2} = \frac{t_1 - t_2}{t_3 - t_4} \text{ и}$$

$$t_1 = \dot{I}_0[z(R \pm a)] \dot{N}_0[z(R \pm a \pm h_{2,1})],$$

$$t_2 = \dot{I}_0[z(R \pm a \pm h_{2,1})] \dot{N}_0[z(R \pm a)],$$

$$t_3 = \dot{I}_0[z(R \pm a)] \dot{N}_0[z(R \pm a \pm h_{2,1})],$$

$$t_4 = \dot{I}_0[z(R \pm a \pm h_{2,1})] \dot{N}_0[z(R \pm a)].$$

Величина, характеризующая замедление электромагнитной волны,

$$\text{входит в индекс цилиндрических функций } \left( v = \frac{c}{v_\phi} = \frac{n_0}{kR} \right).$$

Первое приближение соответствует тому случаю, когда расстояние между соседними диафрагмами много меньше длины волны в волноводе, толщина диафрагм значительно меньше расстояния между ними, а в резонаторах существует только основной тип колебаний, поле которого не зависит от азимутальной координаты. Результаты анализа подобного рода задач для различных типов диафрагмированных волноводов [3, 4] дают основание считать, что теоретическое исследование в первом приближении является достаточным

для выяснения основных свойств рассматриваемой системы. Следующие приближения, учитывающие высшие гармоники, лишь количественно могут изменить результат (порядок поправок—15—20 % к первому приближению), не изменив качественную картину.

Заметим, что при сравнительно слабом изгибе ( $\kappa R \gg 1$ ) и симметрично диафрагмированном волноводе ( $h_1 = h_2$ ), уравнение (11) переходит в

$$\frac{\operatorname{tg} \kappa h I_{n_0} [\kappa(R-a)] + I_{n_0} [\kappa(R-a)]}{\operatorname{tg} \kappa h N_{n_0} [\kappa(R-a)] + N_{n_0} [\kappa(R-a)]} =$$

$$= \frac{\operatorname{tg} \kappa h I_{n_0} [\kappa(R+a)] - I_{n_0} [\kappa(R+a)]}{\operatorname{tg} \kappa h N_{n_0} [\kappa(R+a)] - N_{n_0} [\kappa(R+a)]},$$

которое, будучи квадратным относительно  $\operatorname{tg} \kappa h$ , одновременно описывает дисперсионные свойства синфазных и противофазных волн, первые из которых являются симметричными, а вторые антисимметричными в радиальном направлении относительно центра пространства взаимодействия. В этом легко убедиться, если сделать предельный переход при  $\kappa R \ll \sqrt{\kappa R}$  к неизогнутому волноводу. Если волновод диафрагмирован вдоль одной стенки ( $h_2 = 0$  или  $h_1 = 0$ ) или несимметрично ( $h_1 \neq h_2$ ), то в нем могут существовать лишь противофазные волны рассматриваемого типа.

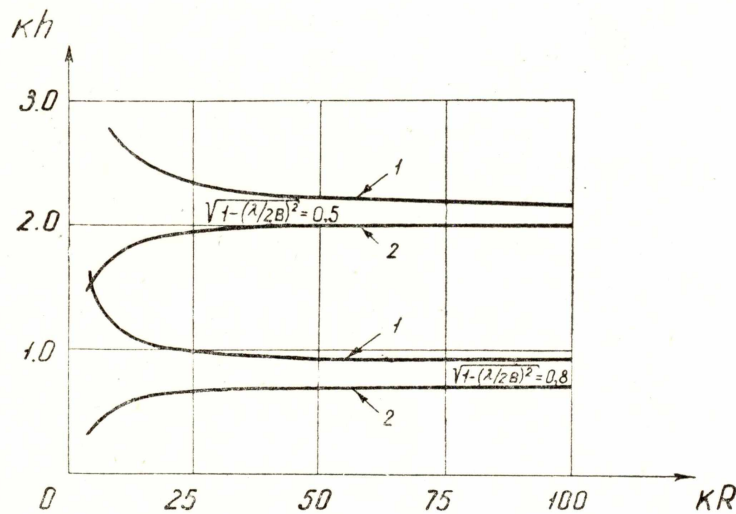


Рис. 2. Кривые, иллюстрирующие влияние изгиба на свойства диафрагмированного волновода: 1) синфазные волны; 2) противофазные волны.

На рис. 2 изображена зависимость относительной высоты диафрагм  $\kappa h$  от относительного радиуса изгиба при  $v_\phi = c$ ,  $\kappa a = 2$  и двух различных значений высоты  $b$  волновода. Проведенные расчеты показывают, что изогнутый волновод, диафрагмированный вдоль изогнутых стенок, обеспечивает  $v = 1$  на среднем радиусе  $R$  при геометрических размерах, которые позволяют использовать его в качестве ускоряющей камеры волноводного циклического ускорителя с управляющим магнитным полем.



### Вывод дисперсионного уравнения для волновода, диафрагмированного по торцевым стенкам

Изогнутый волновод, диафрагмированный по торцевым стенкам, изображен на рис. 3. Первоначальные предположения будут такими же, как и выше. Существенным отличием в данном случае от предыдущей задачи будет тот факт, что в волноводе, нагруженном по торцевым стенкам, возможно существование лишь гибридных волн, поскольку граничные условия на границе раздела области взаимодействия и области резонаторов не удовлетворяются волной одного типа. Поле в резонаторе может рассматриваться как сумма полей „электрической“ и „магнитной“ волн:

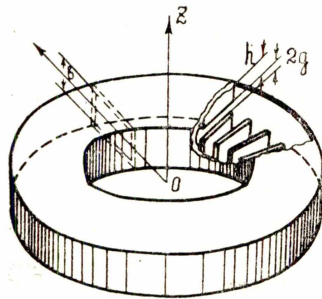
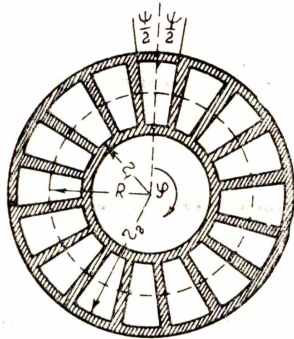


Рис. 3. Изогнутый волновод, диафрагмированный по торцевым стенкам.

ду диафрагмами. Продольные составляющие поля  $E_z$  и  $H_z$  определяются соотношениями:

$$E_r = -\frac{1}{\kappa_c^2} \left( \kappa'_z \frac{\partial E_z}{\partial r} + j \frac{\kappa}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \right);$$

$$E_\varphi = \frac{1}{\kappa_c^2} \left( -\frac{\kappa_z}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} + j \kappa \frac{\partial H_z}{\partial r} \right);$$

$$H_r = \frac{1}{\kappa_c^2} \left( -\kappa'_z \frac{\partial H_z}{\partial r} + j \frac{\kappa}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} \right);$$

$$H_\varphi = -\frac{1}{\kappa_c^2} \left( \frac{\kappa'_z}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} + j \kappa \frac{\partial E_z}{\partial r} \right),$$

где  $\kappa_c^2 = \kappa^2 - \kappa_z'^2$ ,  $\kappa'_z$  — постоянная распространения волн вдоль оси  $z$ .  $\kappa'_z$  может быть действительной или мнимой в зависимости от отношения  $\kappa_c^2/\kappa^2$ , которое, в свою очередь, определяется длиной волны и расстоянием между диафрагмами.

$$E_z = \sum_{l_1=1,3,5,\dots}^{\infty} B_l f_l \cos \alpha \varphi - \sum_{l_2=2,4,6,\dots}^{\infty} B_l f_l \sin \alpha \varphi \left[ \operatorname{ch} \kappa'_{zl}(z+h), \right.$$

$$H_z = -B'_0 F'_l \sin \kappa'_{z0} (z+h) - \left[ \sum_{l_1=1,3,5,\dots}^{\infty} B'_l F'_l \sin \alpha \varphi - \right.$$

$$\left. - \sum_{l_2=2,4,6,\dots}^{\infty} B'_l F'_l \cos \alpha \varphi \right] \operatorname{sh} \kappa'_{zl}(z+h).$$

На границе (пространство резонаторов — пространство взаимодействия) поперечные составляющие поля будут равны

$$E_r = j \sum_{l_1=1,3,5,\dots}^{\infty} \left( A_l \kappa'_{zl} f'_l \kappa'_{cl} - A'_l \frac{\kappa \alpha}{r} F_l \right) \cos \alpha \varphi +$$

$$\begin{aligned}
& + j \sum_{l_2=2,4,6,\dots}^{\infty} (A_l \kappa'_{zl} f'_l \kappa_{cl} - A'_l \frac{\kappa \alpha}{r} F_l) \sin \alpha \varphi; \\
E_{\varphi} = & j A'_0 \kappa \kappa_{co} F'_0 + j \sum_{l_1=1,3,5,\dots}^{\infty} (A_l \kappa'_{zl} \frac{\alpha}{r} f_l + A'_l \kappa \kappa_{cl} F'_l) \sin \alpha \varphi + \\
& + j \sum_{l_2=2,4,6,\dots}^{\infty} (A_l \kappa'_{zl} \frac{\alpha}{r} f_l + A'_l \kappa \kappa_{cl} F'_l) \cos \alpha \varphi; \\
H_r = & - A'_0 \kappa'_{z0} \kappa_{co} F'_0 \operatorname{ctg} \kappa'_{z0} h + \sum_{l_1=1,3,5,\dots}^{\infty} (-A_l \frac{\kappa \alpha}{r} f_l - A'_l \kappa'_{zl} \kappa_{cl} F'_l) \times \\
& \times \operatorname{cth} \kappa'_{zl} h \sin \alpha \varphi + \sum_{l_2=2,4,6,\dots}^{\infty} (-A_l \frac{\kappa \alpha}{r} f_l - A'_l \kappa'_{zl} \kappa_{cl} F'_l) \operatorname{cth} \kappa'_{zl} h \cdot \cos \alpha \varphi; \\
H_{\varphi} = & \sum_{l_1=1,3,5,\dots}^{\infty} (A'_l \frac{\kappa_{zl} \alpha}{r} F_l - A_l \kappa \kappa_{cl} f'_l) \operatorname{cth} \kappa'_{zl} h \cdot \cos \alpha \varphi + \\
& + \sum_{l_2=2,4,6,\dots}^{\infty} (A'_l \frac{\kappa_{zl} \alpha}{r} F_l - A_l \kappa \kappa_{cl} f'_l) \operatorname{cth} \kappa'_{zl} h \cdot \sin \alpha \varphi,
\end{aligned}$$

$$\text{где } A'_0 = B'_0 \sin \kappa'_{z0} h, \quad A'_l = B'_l \operatorname{sh} \kappa'_{zl} h, \quad A_l = B_l \operatorname{sh} \kappa'_{zl} h.$$

$f_l, F_l, F'_l$  и  $f'_l$  совпадают с их значениями из [7] с заменой  $x$  на  $\kappa_{cl}$  и  $r_1, r_2$  на  $r$ .

Если ширина канавки  $\psi \ll \lambda_{\varphi}$ , то можно предположить, что в резонаторе распространяется только волна основного типа  $H_{01}$ , и поле границе резонатора имеет две составляющие:

$$E_{\varphi} = j A'_0 \kappa \kappa_{co} F'_0, \quad H_r = -A'_0 \kappa'_{z0} \kappa_{co} F'_0 \operatorname{ctg} \kappa'_{z0} h. \quad (13)$$

Поле в пространстве взаимодействия также может быть представлено суммой двух волн: „электрической“ и „магнитной“. Для получения гибридной волны вводятся две потенциальные функции,  $\Pi_E(r, \varphi, z)$  и  $\Pi_H(r, \varphi, z)$ , представляющие собой составляющие электрического и магнитного векторов Герца по оси  $z$ . Обе эти функции удовлетворяют волновому уравнению в пространстве взаимодействия волновода. Уравнения поля для пространства взаимодействия записываются в виде

$$\begin{aligned}
E_r = & \sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{-j n_s \varphi} (D'_s \kappa \frac{n_s}{r} F_{ns} - D_s \kappa_{zs} \kappa_s f'_{ns}) \operatorname{ctg} \kappa_{zs} (g-z); \\
E_{\varphi} = & j \sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{-j n_s \varphi} (-D_s \kappa_{zs} \frac{n_s}{r} f_{ns} - D'_s \kappa \kappa_s F'_{ns}) \operatorname{ctg} \kappa_{zs} (g-z);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_r &= \sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{-jn_s z} (-D'_s \kappa_{zs} z_s F'_{ns} - D_s \kappa \frac{n_s}{r} f_{ns}); \\
H_\varphi &= j \sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{-jn_s z} (-D_s \kappa z_s f'_{ns} + D'_s \kappa_{zs} \frac{n_s}{r} F_{ns}).
\end{aligned} \tag{14}$$

Здесь

$$D = C \sin z \kappa_z, \quad D' = C' \sin \kappa_z z;$$

$$f_n = I_n(zr) + P N_n(zr);$$

$$f'_n = \dot{I}_n(zr) + P \dot{N}_n(zr);$$

$$F_n = I_n(zr) + P' N_n(zr);$$

$$F'_n = \dot{I}_n(zr) + P' \dot{N}_n(zr);$$

$$P = -\frac{I_n(zr_2)}{N_n(zr_2)}, \quad P' = -\frac{\dot{I}_n(zr_2)}{\dot{N}_n(zr_2)}.$$

$\chi = \sqrt{\kappa^2 - \kappa_z^2}$  является поперечным волновым числом;  $\kappa_z$  — постоянная распространения волн вдоль оси  $z$  может быть мнимой, если  $\chi^2 < \kappa^2$ . В этом случае тригонометрические функции, определяющие характер изменения поля по оси  $z$ , становятся гиперболическими. Для значительных замедлений  $\kappa_z$  всегда мнимо.

Сшивание касательных составляющих из (12) и (14) на границе областей приводят к уравнениям:

$$\left\{ \begin{aligned}
& \sum_{s=-\infty}^{\infty} \left( D'_s \kappa \frac{n_s}{r} F_{ns} - D_s \kappa_{zs} z_s f'_{ns} \right) \operatorname{cth} \kappa_{zs} g B_{sl_1} = \\
& = -A_{l_1} \kappa'_{zl} f'_l \kappa_{cl} \frac{\psi}{2} + A'_{l_1} \frac{\kappa}{r} \frac{l\pi}{2} f_l; \\
& \sum_{s=-\infty}^{\infty} \left( D'_s \kappa \frac{n_s}{r} F_{ns} - D_s \kappa_{zs} z_s f'_{ns} \right) \operatorname{cth} \kappa_{zs} g C_{sl_1} = \\
& = +A_{l_2} \kappa'_{zl} f'_l \kappa_{cl} \frac{\psi}{2} - A'_{l_2} \frac{\kappa}{r} \frac{l\pi}{2} F_l.
\end{aligned} \right. \tag{15}$$

$$\left\{ \begin{aligned}
& \sum_{s=-\infty}^{\infty} \left( D_s \kappa_{zl} \frac{n_s}{r} f_{ns} + D'_s \kappa z F'_{ns} \right) \operatorname{cth} \kappa_{zs} g C'_{so} = \\
& = A'_0 \kappa \kappa_{co} F'_0 \psi; \\
& \sum_{s=-\infty}^{\infty} \left( D_s \kappa_{zs} \frac{n_s}{r} f_{ns} + D'_s \kappa z_s F'_{ns} \right) \operatorname{cth} \kappa_{zs} g B'_{sl_1} =
\end{aligned} \right. \tag{16}$$



$$\left\{ \begin{aligned} &= -A_{l_1} \frac{\kappa'_z l}{r} \frac{l\pi}{2} f_l + A'_{l_1} \kappa \kappa_{cl} \frac{\psi}{2} F'_l; \\ &\sum_{s=-\infty}^{\infty} \left( D_s \kappa_{zs} \frac{n_s}{r} Y_{ns} + D'_s \kappa_{zs} F'_{ns} \right) \text{cth } \kappa_{zs} g C'_{sl_2} = \\ &= A_{l_2} \frac{\kappa'_{zl}}{r} \frac{l\pi}{2} f_l + A'_{l_2} \kappa \kappa_{cl} \frac{\psi}{2} F'_l. \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} &\sum_{s=-\infty}^{\infty} \left( -D_s \kappa_{zs} f'_{ns} + D'_s \frac{\kappa_{zs} n_s}{r} F'_{ns} \right) C'_{sl_2} = \\ &= \left( -A_{l_2} \kappa \kappa_{cl} f'_l \frac{\psi}{2} + A'_{l_2} \frac{\kappa'_{zl}}{r} \frac{l\pi}{2} F'_l \right) \text{cth } \kappa'_{zl} h; \end{aligned} \right. \quad (17)$$

$$\left\{ \begin{aligned} &\sum_{s=-\infty}^{\infty} \left( -D_s \kappa_{zs} f'_{ns} + D'_s \frac{\kappa_{zs} n_s}{r} F'_{ns} \right) B'_{sl_1} = \\ &= - \left( A_{l_1} \kappa \kappa_{cl} f'_l \frac{\psi}{2} + A'_{l_1} \frac{\kappa'_{zl}}{r} \frac{l\pi}{2} F'_l \right) \text{cth } \kappa'_{zl} h. \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} &\sum_{s=-\infty}^{\infty} \left( D_s \frac{\kappa n_s}{r} f_{ns} + D'_s \kappa_{zs} F'_{ns} \right) C_{so} = \\ &= \psi A'_o \kappa'_{zo} \kappa_{co} F'_o \text{ctg } \kappa'_{zo} h; \end{aligned} \right. \quad (18)$$

$$\left\{ \begin{aligned} &\sum_{s=-\infty}^{\infty} \left( D_s \frac{\kappa n_s}{r} f_{ns} + D'_s \kappa_{zs} F'_{ns} \right) C_{2l_2} = \\ &= \left( A_{l_2} \frac{\kappa}{r} \frac{l\pi}{2} f_l + A'_{l_2} \kappa'_{zl} \kappa_{cl} F'_l \frac{\psi}{2} \right) \text{cth } \kappa'_{zl} h; \\ &\sum_{s=-\infty}^{\infty} \left( D_s \frac{\kappa n_s}{r} f_{ns} + D'_s \kappa_{zs} F'_{ns} \right) B_{sl_1} = \\ &= \left( A_{l_1} \frac{\kappa}{r} \frac{l\pi}{2} f_l + A'_{l_1} \kappa_{zl} \kappa_{cl} F'_l \frac{\psi}{2} \right) \text{cth } \kappa'_{zl} h. \end{aligned} \right.$$

Здесь  $C_{sl_2}$ ,  $C'_{sl_2}$ ,  $B_{sl_1}$ ,  $B'_{sl_1}$  — постоянные сомножители, зависящие от геометрических размеров структуры [4].

Из уравнений (15, 16, 17 и 18) следует, что для того, чтобы выполнялось условие равенства нулю составляющих  $E_r$  и  $H_\varphi$  в пространстве резонатора для полей с индексами  $l=0$ , необходимо, чтобы выполнялось равенство нулю этих составляющих в пространстве взаимодействия.

Анализируя характер функций  $f'$ ,  $F'$  и  $f$ ,  $F$ , можно показать, что составляющие  $E_r$ ,  $H_\varphi$  поля гибридной волны вычитаются, а  $E_\varphi$  и

$H_r$ —складываются. На основании сказанного  $E_r$  можно положить равным нулю. Для неизогнутого диафрагмированного волновода аналогичное положение выполняется точно. В данном случае оно выполняется приближенно

$$-D_s \kappa_{zs} z_s f'_{ns} + D'_s \frac{\kappa n_s}{r} F_{ns} = 0,$$

откуда

$$D_s = D'_s \frac{\kappa n_s F_{ns}}{r z_s \kappa_{zs} f'_{ns}}.$$

Тогда уравнения (15) — (18) можно записать

$$\left. \begin{aligned} \sum_{s=-\infty}^{\infty} D'_s \frac{\kappa}{r^2 z_s f'_{ns}} \left( n_s^2 f_{ns} F_{ns} + z_s^2 r^2 f'_{ns} F'_{ns} \right) C'_{so} \operatorname{cth} \kappa_{zs} g = \\ = A'_o \kappa \kappa_{co} F'_o \psi; \\ \sum_{s=-\infty}^{\infty} D'_s \frac{\kappa}{r^2 z_s f'_{ns}} \left( n_s^2 f_{ns} F_{ns} + z_s^2 r^2 f'_{ns} F'_{ns} \right) C'_{sl_2} \operatorname{cth} \kappa_{zs} g = \\ = A_{l_2} \frac{\kappa'_{zl}}{r} \frac{l\pi}{2} f_l + A'_{l_2} \kappa F'_l \frac{\psi}{2}; \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \sum_{s=-\infty}^{\infty} D'_s \frac{\kappa}{r^2 z_s f'_{ns}} (n_s^2 f_{ns} F_{ns} + z_s^2 r^2 f'_{ns} F'_{ns}) B'_{sl_1} \operatorname{cth} \kappa_{zs} g = \\ = A_{l_1} \frac{\kappa'_z l}{r} \frac{l\pi}{2} f_l + A'_{l_1} \kappa \kappa_{cl} F'_l \frac{\psi}{2}. \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{s=-\infty}^{\infty} D'_s \frac{1}{r^2 \kappa_{zs} z_s f'_{ns}} (\kappa^2 n_s^2 F_{ns} f_{ns} + r^2 \kappa_{zs}^2 z_s^2 f'_{ns} F'_{ns}) C_{so} = \\ = A'_o \kappa'_{zo} \kappa_{co} F'_o \psi \operatorname{ctg} \kappa'_{zo} h; \\ \sum_{s=-\infty}^{\infty} D'_s \frac{1}{r^2 \kappa_{zs} z_s f'_{ns}} (\kappa^2 n_s^2 f_{ns} F_{ns} + r^2 \kappa_{zs}^2 z_s^2 f'_{ns} F'_{ns}) C_{sl_2} = \\ = \left( A_{l_2} \frac{\kappa}{r} \frac{l\pi}{2} f_l + A'_{l_2} \kappa'_{zl} \kappa_{cl} F'_l \frac{\psi}{2} \right) \operatorname{cth} \kappa'_{zl} h; \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \sum_{s=-\infty}^{\infty} D'_s \frac{1}{r^2 \kappa_{zs} z_s f'_{ns}} (\kappa^2 n_s^2 f_{ns} F_{ns} + r^2 \kappa_{zs}^2 z_s^2 f'_{ns} F'_{ns}) B_{sl_1} = \\ = \left( A_{l_1} \frac{\kappa}{r} \frac{l\pi}{2} f_l + A'_{l_1} \kappa'_{zl} \kappa_{cl} F'_l \frac{\psi}{2} \right) \operatorname{cth} \kappa'_{zl} h. \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{s=-\infty}^{\infty} D'_s \frac{n_s}{r \kappa_{zs}} F_{ns} (\kappa_{zs}^2 - \kappa^2) C'_{sl_2} &= \\ &= \left( -A_{l_2} \kappa \kappa_{cl} f'_l \frac{\psi}{2} + A'_{l_2} \frac{\kappa_{zl}}{2} \frac{l\pi}{2} F_l \right) \operatorname{cth} \kappa'_{zl} h; \\ \sum_{s=-\infty}^{\infty} D'_s \frac{n_s}{r \kappa_{zs}} F_{ns} (\kappa_{zs}^2 - \kappa^2) B'_{sl_1} &= \\ &= \left( -A_{l_1} \kappa \kappa_{cl} f'_l \frac{\psi}{2} + A'_{l_1} \frac{\kappa_{zl}}{r} \frac{l\pi}{2} F_l \right) \operatorname{cth} \kappa'_{zl} h. \end{aligned} \right. \quad (21)$$

Используя уравнения (19, 20 и 21), можно составить бесконечную систему уравнений относительно  $D'_s$ , исключая неизвестные  $A_o$ ,  $A_l$ ,  $A_{l_2}$ ,  $A'_{l_1}$ ,  $A'_{l_2}$ . Дисперсионное уравнение может быть записано в виде бесконечного определителя, из которого могут быть получены решения в любом приближении. Ввиду большой сложности полученного решения и учитывая также, что вывод носит приближенный характер, целесообразно ограничиться решением в первом приближении, которое после ряда преобразований записывается следующим образом

$$\begin{aligned} & \frac{n^2 f_n F_n + \frac{x_{n_1}^2}{4} (c+1)^2 F'_n f'_n}{1 - \left[ \frac{A\lambda}{[r_2 - r_1] 2\pi} \right]^2 + \frac{x_{n_1}^2}{4} (c+1)^2 F'_n f'_n} = \\ & = \frac{\sqrt{1 - \left[ \frac{A\lambda}{(r_2 - r_1) 2\pi} \right]^2} \cdot \operatorname{tg} \sqrt{1 - \left[ \frac{c_1^E}{(r_2 - r_1) 2\pi} \right]^2} \cdot \Theta}{\sqrt{1 - \left[ \frac{c_1^E}{(r_2 - r_1) 2\pi} \right]^2} \cdot \operatorname{cth} \frac{g}{h} \Theta \sqrt{1 - \left[ \frac{A\lambda}{(r_2 - r_1) 2\pi} \right]^2}} \quad (22) \end{aligned}$$

Здесь  $\Theta \doteq \kappa h$  электрическая глубина канавки,

$$A = x(r_2 - r_1), \quad c_1^E = \frac{x_{01}(r_2 - r_1)}{r_1}, \quad \frac{r_2 + r_1}{2} = R, \quad c = \frac{r_2}{r_1}.$$

Уравнение (22) позволяет произвести сшивание полей в средней точке волновода. Расчеты показывают, что геометрические размеры волновода, диафрагмированного по торцевым стенкам, оказываются весьма близкими к размерам волновода, рассмотренного в предыдущем параграфе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Воробьев А. А., Изв. вузов МВО СССР Электромеханика, 1, 1958.
2. Кисунько Г. В., Электродинамика полых систем, Изд. ВКАС, Л. 1949.
3. Леонтьева Р. М., Радиотехника т. 12, №12, 1957.
4. Трунова Н. В., Изв. вузов МВО СССР, Радиотехника, 1, 1958.